

RIGIDITÉ CONFORME DES HÉMISPÈRES S_+^4 ET S_+^6

SIMON RAULOT

RÉSUMÉ. Soit (M, g) une variété compacte localement conformément plate à bord totalement ombilique de dimension quatre ou six. On montre que si la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est égale à 1 et si son invariant de Yamabe est strictement positif, alors (M, g) est conformément isométrique à l'hémisphère standard. En combinant cet énoncé à un travail de Hang-Wang [HW06], on obtient un résultat de rigidité pour ces hémisphères à mettre en relation avec la conjecture de Min-Oo.

Conformal Rigidity of the hemispheres S_+^4 and S_+^6

ABSTRACT. Let (M, g) be a four or six dimensional compact Riemannian manifold which is locally conformally flat and assume that its boundary is totally umbilical. In this note, we prove that if the Euler characteristic of M is equal to 1 and if its Yamabe invariant is positive, then (M, g) is conformally isometric to the standard hemisphere. As an application and using a result of Hang-Wang [HW06], we prove a rigidity result for these hemispheres regarding the Min-Oo conjecture.

1. INTRODUCTION

Inspiré par les théorèmes de la masse positive en Relativité Générale, Min-Oo proposa la conjecture suivante:

Conjecture de Min-Oo: *Soit g une métrique riemannienne sur l'hémisphère S_+^n telle que:*

- (1) *la courbure scalaire de g est supérieure ou égale à $n(n-1)$,*
- (2) *la métrique induite par g sur ∂S_+^n est isométrique à la métrique ronde sur S^{n-1} ,*
- (3) *le bord est totalement géodésique pour la métrique g ,*

alors g est isométrique à la métrique ronde sur S_+^n .

Cette conjecture a fait l'objet d'une attention particulière ces dernières années et a été prouvée dans de nombreux cas particuliers. Cependant, dans un travail récent [BMN11], Brendle, Marques et Neves construisent, pour $n \geq 3$, des métriques sur l'hémisphère à courbure scalaire strictement supérieure à $n(n-1)$ satisfaisant les conditions (2) et (3). De tels exemples mettent donc en défaut la validité de l'énoncé de Min-Oo. On peut alors naturellement se demander sous quelles hypothèses cet énoncé est vrai. Dans [HW09], Hang et Wang montrent qu'en remplaçant l'hypothèse (1) sur la courbure scalaire par son analogue sur la courbure de Ricci, la conjecture est vérifiée. Le cas de la dimension

Date: 19 janvier 2013.

2000 Mathematics Subject Classification. Differential Geometry, Global Analysis, 53C24, 58J32.

Key words and phrases. Manifolds with boundary, Hemisphere, Rigidity.

3 est traité dans [Eic09] avec des conditions supplémentaires sur le profil isopérimétrique de ∂M . Dans un autre travail [HW06], Hang et Wang s'intéressent aux déformations conformes des métriques sur l'hémisphère standard et ils prouvent en particulier la conjecture pour ce type de transformations. Plus précisément, ils montrent:

Théorème 1. ([HW06]) *Soit $\bar{g} = e^{2u}g_{st}$ une métrique dans la classe conforme de la métrique ronde g_{st} à courbure scalaire $R_{\bar{g}} \geq n(n-1)$. Si $\bar{g} = g_{st}$ le long de $\partial \mathbf{S}_+^n$, alors $\bar{g} = g_{st}$ sur \mathbf{S}_+^n .*

Ce résultat est une des motivations de cette note. La seconde motivation est donnée par la validité de la conjecture de Min-Oo en dimension 2. Elle découle, dans ce cas, d'un résultat de Toponogov [Top59] qu'on peut énoncer de la manière suivante (voir aussi [HW09]):

Théorème 2. ([Top59]) *Soit (M^2, g) une surface fermée dont la courbure de Gauss satisfait $K \geq 1$. Alors toute géodésique fermée simple de M est de longueur au plus 2π . De plus, s'il en existe une dont la longueur vaut 2π alors M est isométrique à la sphère standard.*

Puisque toute surface est localement conformément plate, il semble naturelle de se demander si la conjecture de Min-Oo est vérifiée pour les variétés localement conformément plates de dimension $n \geq 3$. On montre qu'un tel résultat est vérifié pour $n = 4$ et $n = 6$. Pour cela, on s'inspire des travaux de Hebey-Vaugon [HV93] et Gursky [Gur94] afin d'obtenir tout d'abord le résultat suivant de rigidité conforme pour l'hémisphère: si (M, g) est une variété à bord localement conformément plate à invariant de Yamabe $Y_{[g]}(M)$ strictement positif et à caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ strictement positive alors elle est conformément isométrique à l'hémisphère standard (voir les Théorèmes 4 et 5). On notera que la démonstration que l'on donne ici utilise la résolution du problème de Yamabe à bord (voir [Esc92]) et utilise donc implicitement le théorème de la masse positive. En combinant nos résultats au Théorème 1, on obtient un énoncé analogue à celui de Min-Oo pour les variétés localement conformément plates de dimension 4 et 6:

Corollaire 1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension 4 ou 6 et telle que $\chi(M) = 1$. Supposons que le bord $(\partial M, g)$ est totalement ombilique à courbure moyenne positive ou nulle et isométrique à la sphère ronde $(\mathbf{S}^{n-1}, g_{st})$. Si (M, g) est localement conformément plate à courbure scalaire $R \geq n(n-1)$ alors (M, g) est isométrique à l'hémisphère standard.*

Notons que notre hypothèse sur la géométrie extrinsèque de ∂M (i.e. ∂M est totalement ombilique à courbure moyenne positive ou nulle) est moins restrictive que l'hypothèse (3). D'autre part, combinée à l'hypothèse sur la courbure scalaire, elle permet d'assurer que la variété (M, g) a un invariant de Yamabe strictement positif permettant ainsi d'appliquer les Théorèmes 4 et 5.

2. LE CAS DE LA DIMENSION 4

On considère ici (M^4, g) une variété riemannienne compacte de dimension 4 à bord lisse ∂M . La formule de Chern-Gauss-Bonnet pour les variétés à bord de dimension 4

est donnée par (voir [Che09] par exemple):

$$32\pi^2\chi(M) = \int_M |W|^2 dv + \int_M \left(\frac{R^2}{6} - 2|E|^2 \right) dv + 8 \int_{\partial M} \mathcal{B} ds \quad (1)$$

où W , R et $E := Ric - (R/4)g$ sont respectivement le tenseur de Weyl, la courbure scalaire et la partie sans trace du tenseur de Ricci de (M, g) et

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}RH - Ric(N, N)H - Riem_{\gamma\alpha\gamma\beta}S^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}H^3 - H|S|^2 + \frac{2}{3}\text{Tr}(S^3).$$

Ici $Riem$, Ric désignent le tenseur de courbure de Riemann et le tenseur de courbure de Ricci de (M^4, g) et N , S , H le champ normal unitaire sortant à ∂M , la seconde forme fondamentale et la courbure moyenne de ∂M dans M (pour la métrique g). Le terme $\text{Tr}(S^3)$ est définie par $S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma}S_{\gamma\alpha}$. Dans la suite, on notera Ric_u , R_u , ... pour désigner ces quantités dans une métrique g_u conforme à g dont le facteur conforme dépend d'une fonction u . Puisque le tenseur de Weyl est invariant par changement conforme de la métrique et que $\chi(M)$ est un invariant topologique, on obtient alors l'invariance conforme de la quantité

$$\mathcal{F}_2([g]) := \int_M \left(\frac{R^2}{96} - \frac{|E|^2}{8} \right) dv_u + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \mathcal{B} ds. \quad (2)$$

Dans un premier temps, on donne une estimation de la première valeur propre du laplacien conforme sur les variétés à bord de dimension 4 en fonction de l'invariant $\mathcal{F}_2([g])$. Cette inégalité est un analogue de [HR07] dans le cadre à bord.

Théorème 3. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte à bord totalement ombilique, alors:*

$$\lambda_1(L)^2 \geq \frac{96}{\text{Vol}(M^4, g)} \mathcal{F}_2([g]) \quad (3)$$

où $\lambda_1(L)$ désigne la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe:

$$\begin{cases} Lf_1 = 6\Delta f_1 + Rf_1 = \lambda_1(L)f_1 & \text{sur } M \\ Bf_1|_{\partial M} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial N} + Hf_1 \right)|_{\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M. \end{cases} \quad (4)$$

De plus, on a égalité si et seulement si (M^4, g) est conformément isométrique à une variété d'Einstein dont le bord est totalement géodésique.

Bien que la première valeur propre $\lambda_1(L)$ n'est pas invariante par changement conforme, elle contient néanmoins des informations sur la structure conforme de la métrique g . En effet, il est montré dans [Esc92] que son signe est un invariant conforme donné par le signe de l'invariant de Yamabe $Y_{[g]}(M)$ associé à (M, g) (voir ci-après pour une définition précise de cet invariant). En particulier, l'inégalité (3) implique que si (M^4, g) est une variété à bord totalement ombilique telle que $\mathcal{F}_2([g]) > 0$ alors l'invariant de Yamabe est strictement positif ou strictement négatif. De manière équivalente, cela signifie que (M^4, g) possède, dans sa classe conforme, une métrique à courbure scalaire strictement positive ou strictement négative, les deux situations étant bien sûr exclusives. Pour plus de détails sur ce sujet, on pourra consulter la première partie de [Esc92].

Preuve du Théorème 3: La démonstration de ce résultat repose sur la covariance conforme de $\mathcal{F}_2([g])$ et sur le choix d'un facteur conforme adapté. Remarquons tout

d'abord que si g_u est une métrique conforme à g à courbure moyenne nulle (et donc à bord totalement géodésique dans la métrique g_u), l'invariant $\mathcal{F}_2([g])$ s'écrit:

$$\mathcal{F}_2([g]) = \int_M \left(\frac{R_u^2}{96} - \frac{|E_u|_u^2}{8} \right) dv_u$$

ce qui donne:

$$\mathcal{F}_2([g]) \leq \frac{1}{96} \int_M R_u^2 dv_u \quad (5)$$

avec égalité si et seulement si la métrique g_u est Einstein. Soit maintenant f_1 une solution du problème à bord (4) qu'on peut choisir strictement positive sur M et considérons la métrique riemannienne $g_{f_1} = f_1^2 g$ sur M . En utilisant les transformations conformes de la courbure scalaire et de la courbure moyenne, on obtient:

$$R_{f_1} = f_1^{-3} L f_1 = \lambda_1(L) f_1^{-2} \quad \text{et} \quad H_{f_1} = f_1^{-2} B f_1 = 0.$$

En particulier, le bord $(\partial M, g_{f_1})$ est totalement géodésique dans (M, g_{f_1}) . D'autre part, puisque $dv_{f_1} = f_1^4 dv$ et que $\mathcal{F}_2([g])$ est un invariant conforme, l'inégalité (5) dans la métrique g_{f_1} donne bien l'estimation (3). Le cas d'égalité s'obtient facilement puisqu'on a égalité dans (5) et la métrique g_{f_1} est donc Einstein (à bord totalement géodésique). \square

Dans [Esc92], Escobar introduit l'invariant de Yamabe:

$$Y_{[g]}(M) := \inf_{g_u \in [g] / H_u = 0} \left(\frac{\int_M R_u dv_u}{\text{Vol}(M, g_u)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

afin d'étudier le problème suivant: étant donnée une variété riemannienne compacte à bord, existe-t-il une métrique conforme (à la métrique initiale) à courbure scalaire constante et à courbure moyenne nulle? Ce problème est un analogue du problème de Yamabe classique dans le cadre des variétés à bord. Il n'est pas difficile de vérifier que si $Y_{[g]}(M) \geq 0$ on a:

$$Y_{[g]}(M) = \inf_{g_u \in [g]} \left(\lambda_1(L_u) \text{Vol}(M, g_u)^{\frac{1}{2}} \right),$$

où $\lambda_1(L_u)$ est la première valeur propre (4) du laplacien conforme L_u pour la métrique g_u . Ainsi en combinant l'estimation du Théorème 3 à cette caractérisation, on obtient:

$$96\mathcal{F}_2([g]) \leq Y_{[g]}(M)^2 \leq Y_{[g_{st}]}(\mathbf{S}_+^4)^2 = 192\pi^2. \quad (6)$$

La dernière inégalité est due à Escobar et l'égalité est atteinte si et seulement si (M^4, g) est conformément isométrique à l'hémisphère standard de dimension 4 (voir le Théorème 4.1 dans ([Esc92])). À l'aide de ces estimations, on a alors:

Théorème 4. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte orientée à bord de dimension 4. On suppose que M est localement conformément plate et que son bord est totalement ombilique. Alors si $\chi(M) = 1$ et $Y_{[g]}(M) > 0$, la variété (M^4, g) est conformément isométrique à l'hémisphère (\mathbf{S}_+^4, g_{st}) .*

Preuve: Remarquons tout d'abord que si (M^4, g) est une variété riemannienne compacte orientée, localement conformément plate, à bord totalement ombilique la formule de Chern-Gauss-Bonnet (1) et l'inégalité (6) donnent:

$$32\pi^2 \chi(M) = 16\mathcal{F}_2([g]) \leq 32\pi^2$$

et donc $\chi(M) \leq 1$. Si on suppose maintenant que $\chi(M) = 1$ on a alors égalité dans (6) et on conclut que (M^4, g) est conformément isométrique à l'hémisphère rond. \square

3. LE CAS DE LA DIMENSION 6

Dans cette section, on prouve un résultat analogue à celui de la partie précédente en dimension 6.

Théorème 5. *Soit (M^6, g) une variété riemannienne compacte orientée à bord de dimension 6. On suppose que M est localement conformément plate et que son bord est totalement ombilique. Alors si $\chi(M) = 1$ et $Y_{[g]}(M) > 0$, la variété (M^6, g) est conformément isométrique à l'hémisphère (\mathbf{S}_+^6, g_{st}) .*

La démonstration de ce résultat repose sur un argument de Gursky [Gur94] et sur la résolution du problème de Yamabe pour les variétés localement conformément plates à bord totalement ombilique (voir le Théorème 4.1 dans ([Esc92])). Encore une fois, on utilise la formule de Chern-Gauss-Bonnet pour les variétés à bord de dimension 6. On ne l'énonce pas ici en toute généralité mais seulement sous une forme utile pour la démonstration de notre résultat (voir [Che09] pour un énoncé général). Un point important ici est de remarquer que si on suppose que le bord est totalement géodésique, alors tous les termes de bord de la formule de Chern-Gauss-Bonnet sont nulles (voir [Che09]). Donc si (M^6, g) est une variété riemannienne compacte localement conformément plate à bord totalement géodésique, on a :

$$256\pi^3\chi(M) = \int_M \text{Tr}(E^3)dv - \frac{2}{5} \int_M R|E|^2dv + \frac{4}{225} \int_M R^3dv. \quad (7)$$

D'autre part, on rappelle (voir [Gur94]) que si (M^n, g) est une variété localement conformément plate de dimension n , on a :

$$\begin{aligned} \Delta E_{ij} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{n-2}{n-1} \right) \nabla_i \nabla_j R - \frac{1}{2n} \left(\frac{n-2}{n-1} \right) (\Delta R) g_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{n-2} |E|^2 g_{ij} - \frac{n}{n-2} g^{\alpha\beta} E_{i\alpha} E_{j\beta} - \frac{1}{n-1} R E_{ij} \end{aligned}$$

où $E := \text{Ric} - (R/n)g$ est la partie sans trace du tenseur de Ricci. Si on suppose maintenant que M est compacte à bord, alors en intégrant l'égalité précédente contre $g^{ik}g^{jl}E_{kl}$, on obtient à l'aide de la formule de Stokes et de la deuxième identité de Bianchi :

$$\begin{aligned} \int_M \text{Tr}(E^3) &= \frac{1}{4} \frac{(n-2)^3}{n^2(n-1)} \int_M |\nabla R|^2 dv - \frac{n-2}{n} \int_M |\nabla E|^2 dv + \frac{n-2}{n(n-1)} \int_M R|E|^2 dv \\ &\quad + \frac{n-2}{n} \int_{\partial M} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial |E|^2}{\partial N} - E(N, \nabla R) \right) ds. \end{aligned}$$

En combinant maintenant cette identité pour $n = 6$ à la formule de Chern-Gauss-Bonnet (7), on obtient :

$$\begin{aligned} 384\pi^3\chi(M) &= \frac{2}{75} \int_M R^3 dv + \frac{2}{15} \int_M |\nabla R|^2 dv - \frac{4}{5} \int_M R|E|^2 dv \\ &\quad + \int_{\partial M} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial |E|^2}{\partial N} - E(N, \nabla R) \right) ds, \end{aligned} \quad (8)$$

pour toute variété de dimension 6, localement conformément plate à bord totalement géodésique. On prouve alors:

Lemme 1. *Si (M^6, g) est une variété localement conformément plate à courbure scalaire constante et à bord totalement géodésique, la formule de Chern-Gauss-Bonnet est donnée par:*

$$384\pi^3\chi(M) = \frac{2}{75}R^3\text{Vol}(M, g) - \frac{4R}{5} \int_M |E|^2 dv.$$

Preuve: Puisque la courbure scalaire est constante, on a $\nabla R = 0$ et le terme de bord dans (8) est donné par:

$$\frac{1}{2} \int_{\partial M} \frac{\partial |Ric|^2}{\partial N} ds = \int_{\partial M} \langle \nabla_N Ric, Ric \rangle ds.$$

Il suffit donc de vérifier que $\langle \nabla_N Ric, Ric \rangle = 0$. Pour cela, on se place dans un système de coordonnées de Fermi (x_1, \dots, x_n) au voisinage d'un point $p \in \partial M$. Puisque le bord est totalement géodésique, on a en p :

$$\langle \nabla_N Ric, Ric \rangle = \sum_{i,j=1}^{n-1} Ric_{ij,n} Ric_{ij} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} Ric_{in,n} Ric_{in} + Ric_{nn,n} Ric_{nn} \quad (9)$$

où $Ric_{ij,n} = (\nabla_{\partial_n} Ric)(\partial_i, \partial_j) = \partial Ric_{ij} / \partial x_n$, les directions $\partial_i := \partial / \partial x_i$ étant tangentes à ∂M pour $1 \leq i \leq n-1$ et la direction $\partial_n := \partial / \partial x_n$ normale à ∂M . Notons tout d'abord que le deuxième terme dans (9) est nul. En effet, l'équation de Codazzi donne pour $1 \leq i, j, k \leq n-1$:

$$Riem_{ijkn} = S_{ik,j} - S_{jk,i} = 0 \quad (10)$$

puisque le bord est totalement géodésique et donc $Ric_{in} = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Pour le dernier terme de (9), on contracte deux fois la deuxième identité de Bianchi et on obtient:

$$0 = R_{,l} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} Ric_{il,i} + 2 Ric_{nl,n}$$

pour tout $1 \leq l \leq n$ puisque R est constante sur M . En particulier, pour $l = n$, on a $Ric_{nn,n} = 0$ car $Ric_{in} = 0$ sur ∂M . Examinons maintenant le premier terme. On remarque tout d'abord que pour $1 \leq i, j \leq n-1$

$$\begin{aligned} Ric_{ij,n} &= \sum_{k=1}^n Riem_{ikjk,n} \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} Riem_{iknj,k} - \sum_{k=1}^{n-1} Riem_{ikkn,j} + Riem_{injn,n} = Riem_{injn,n} \end{aligned} \quad (11)$$

où on a utilisé la deuxième identité de Bianchi et la relation (10). D'autre part, puisque la variété (M, g) est localement conformément plate et de dimension 6, son tenseur de Weyl s'annule et sa courbure de Riemann est donc donnée par:

$$Riem_{ijkl} = \frac{1}{4} (Ric_{ik}g_{jl} + Ric_{jl}g_{ik} - Ric_{il}g_{jk} - Ric_{jk}g_{il}) - \frac{R}{20} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

d'où:

$$Riem_{ijn} = \frac{1}{4}(Ric_{ij}g_{nn} + Ric_{nn}g_{ij} - Ric_{in}g_{jn} - Ric_{jn}g_{in}) - \frac{R}{20}(g_{ij}g_{nn} - g_{in}g_{jn}).$$

En dérivant cette identité dans la direction ∂_n , on obtient

$$Riem_{ijn,n} = \frac{1}{4}Ric_{ij,n} \quad (12)$$

où on a successivement utilisé le fait que $1 \leq i, j \leq n-1$ et que dans la métrique g , le bord est totalement ombilique, la courbure scalaire est constante et $Ric_{nn,n} = 0$. En comparant (11) et (12), on obtient $Ric_{ij,n} = 0$ et donc le premier terme de (9) est bien nul. \square

Preuve du Théorème 5: Supposons que (M^6, g) ne soit pas conformément isométrique à (\mathbf{S}_+^6, g_{st}) . Dans ce cas, par [Esc92] (le point (ii) du Théorème 4.1, p.57), l'invariant de Yamabe de (M^6, g) satisfait:

$$0 < Y_{[g]}(M) < Y_{[g_{st}]}(\mathbf{S}_+^6) = 30\left(\frac{\omega_6}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

où ω_6 est le volume standard de \mathbf{S}^6 et il existe une métrique \bar{g} conforme à g vérifiant $R_{\bar{g}} = Y_{[g]}(M)$, $H_{\bar{g}} = 0$ et $\text{Vol}(M, \bar{g}) = 1$. Puisque le bord est totalement ombilique dans g et que cette propriété est invariante par changement conforme, le bord est totalement géodésique pour la métrique \bar{g} (car $H_{\bar{g}} = 0$). On peut alors appliquer le lemme 1 et comme $\chi(M) = 1$ on a:

$$384\pi^3 \leq \frac{2}{75}Y_{[g]}(M)^3 < \frac{2}{75}Y_{[g_{st}]}(\mathbf{S}_+^6)^3 = 384\pi^3,$$

ce qui conduit à une contradiction et donc (M^6, g) est conformément isométrique à (\mathbf{S}_+^6, g_{st}) . \square

4. UNE REMARQUE SUR LES DIMENSIONS SUPÉRIEURES

Dans [GLW04] (Corollaire 1), un résultat de rigidité conforme pour les variétés localement conformément plates de dimension paire est obtenu. Cependant, il nécessite des hypothèses supplémentaires sur la structure conforme des variétés mises en jeu. On peut obtenir un tel énoncé dans le cadre des variétés localement conformément plates de dimension paire à bord totalement ombilique en utilisant des résultats de Chen. Là aussi des hypothèses supplémentaires sont nécessaires (voir Théorème 4 dans [Che09]). L'énoncé de Min-Oo peut alors être vérifié dans ce cadre à l'aide du Théorème 1. Une question intéressante est de savoir si ces hypothèses sont réellement nécessaires.

REFERENCES

- [BMN11] S. Brendle, F.C. Marques, and A. Neves, *Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature*, à paraître dans Inv. Math. (2011).
- [Che09] S.-Y. S. Chen, *Conformal deformation on manifolds with boundary*, GAFA **19** (2009), 1029–1064.
- [Eic09] M. Eichmair, *The size of isoperimetric surfaces in 3-manifolds and a rigidity result for the upper hemisphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 2733–2740.
- [Esc92] J. F. Escobar, *The Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 21–84.

- [GLW04] P. Guan, C.-S. Lin, and G. Wang, *Application of the method of moving planes to conformally invariant equations*, Math. Zeit. **247** (2004), 1–19.
- [Gur94] M. Gursky, *Locally conformally flat four- and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 747–774.
- [HR07] O. Hijazi and S. Raulot, *Branson’s Q -curvature in Riemannian and Spin Geometry*, SIGMA **3** (2007), no. 119, 14 pages.
- [HV93] E. Hebey and M. Vaugon, *Un théorème de pincement intégral sur la courbure concirculaire en géométrie conforme*, C.R.A.S. **316** (1993), 483–488.
- [HW06] F. Hang and X. Wang, *Rigidity and non-rigidity results on the sphere*, Comm. Anal. Geom. **14** (2006), no. 1, 91–106.
- [HW09] F. Hang and W. Wang, *Rigidity theorems for compact manifolds with boundary and positive Ricci curvature*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 3, 628–642.
- [Top59] V. Toponogov, *Evaluation of the length of a closed geodesic on a convex surface*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **124** (1959), 282–284, (Russian).

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES R. SALEM, UMR 6085 CNRS-UNIVERSITÉ DE ROUEN, AVENUE DE L’UNIVERSITÉ, BP.12, TECHNOPOLE DU MADRILLET, 76801 SAINT-ÉTIENNE-DU-ROUVRAY, FRANCE

E-mail address: `simon.raulot@univ-rouen.fr`